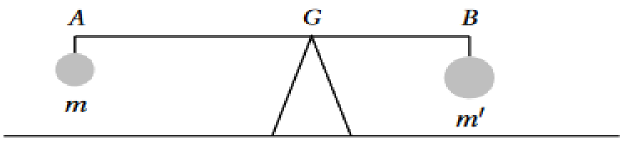
Généralisation de la notion de centre de gravité d'un triangle : les barycentres

Introduction :

La notion de barycentre (qui vient du grec « barus » qui signifie lourd, massif) a été introduite par Archimède au IIIe siècle avant notre ère alors qu'il s'intéressait à l'équilibre des leviers. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'il aurait prononcé la célèbre phrase « donnez-moi un point d'appui, je soulèverai le monde ».
Archimède apporta une solution au problème simple



Sur une tige de masse négligeable, on suspend deux masses m et m′ en A et en B. Comment positionner le pivot G pour que l'ensemble soit en équilibre ?

Les barycentres sont donc d'abord considérés d'un point de vue physique et concret. Il faut attendre le XIXe siècle pour les considérer d'un point de vue purement mathématique. Le mathématicien August Ferdinand Möbius ,dans son mémoire intitulé **« Der barycentrische Calcül »** rédigé en 1827, utilise des systèmes de points auxquels il affecte un coefficient, ou masse, pouvant être aussi bien positif que négatif.

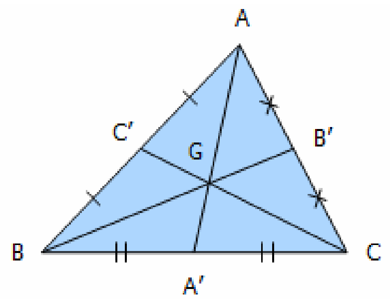
On peut donc se poser la question suivante : Où apparaissent les barycentres dans la vie de tous les jours ?

Qu'est ce que le centre de gravité d'un triangle ?

Par définition, le centre de gravité d'un triangle est le point de concours des 3 médianes d'un triangle.

On rappelle qu'une médiane est une droite qui est issue d'un sommet d'un triangle et qui passe par le milieu du côté opposé.

Le centre de gravité permet de nous dire que



$$AG = \frac{2}{3}AA' \;;\; BG = \frac{2}{3}BB' \;;\; CG = \frac{2}{3}CC'$$

Quel est le lien entre centre de gravité et barycentre?

Définition d'un barycentre :

Soient A, B et C trois points du plan, α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Il existe un unique point G vérifiant :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}.$$

Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, les points A, B et C ainsi que les réels α, β et γ étant donnés, il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}.$

Ce point G est appelé barycentre du système de points pondérés {(A;α); (B;β); (C;γ)}

Exemple :

$[AB]$ est un segment de longueur 6 cm. Le barycentre G_1 de $\{(A;1);(B;2)\}$ vérifie $\overrightarrow{AG_1} = \dfrac{2}{1+2}\overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Le barycentre G_2 de $\{(A;7);(B;-1)\}$ vérifie $\overrightarrow{AG_2} = \dfrac{-1}{-1+7}\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}$.

Remarque : L'isobarycentre de trois points A, B et C est le barycentre de{(A;a); (B;a); (C;a)} où a est différent de 0 .

En physique, le centre d'inertie de points matériels est le barycentre des points d'un solide en mouvement pondérés de leurs masses respectives. Par exemple, on considère un système formé de deux points matériels A et B de masses respectives m_1 et m_2 . Le centre d'inertie du système est le barycentre de $\{(A;m_1);(B;m_2)\}$. Le centre d'inertie est « le point d'équilibre des masses », autrement dit c'est le point par rapport auquel la masse est uniformément répartie.Le centre de gravité est donc fondamentalement lié au champ de gravité dans lequel le corps est plongé. Au voisinage de la Terre ou d'un astre, on confondra centre d'inertie et centre de gravité.

Par conséquent, le centre de gravité est le point d'équilibre donc l'isobarycentre des 3 points du triangle. Chaque point du triangle est affecté du coefficient 1 .

Une application : le barycentre gravitationnel et le système Terre-Lune.

On note T le centre de la Terre, L celui de la Lune et G le centre de masse du système Terre-Lune.

G est le barycentre des points pondérés $(T ; m_T)$ et $(L ; m_L)$
m_T est la masse de la Terre : $m_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg
m_L est la masse de la Lune : $m_L = 7,3 \times 10^{22}$ kg
En multipliant les coefficients par 10^{-22} on en déduit que G est le barycentre des points (T ; 600) et (L ; 7,3).

Construction de G.

$\overrightarrow{TG} = \dfrac{7,3}{600+7,3}\overrightarrow{TL}$ donc $\overrightarrow{TG} = 0,012\,\overrightarrow{TL}$

G est situé à l'intérieur du segment]TL[. on a donc pour les distances : TG = 0,012 TL.

Position de G par rapport au centre de la Terre.

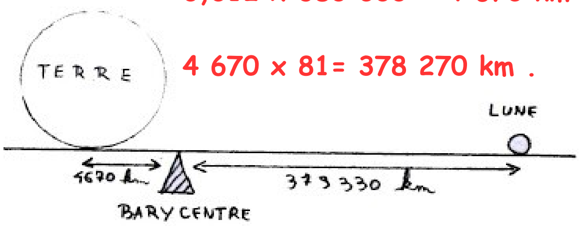
En prenant TL = 380 000 km on obtient TG = 4560 km et en notant R le rayon de la Terre (R = 6 400 km)on a :

$\dfrac{TG}{R} \approx 0,71$

Le centre de masse du système Terre -Lune est donc situé à l'intérieur de la Terre à une distance d'environ 2/3 du centre de la Terre.

0,012 x 380 000 = 4 670 km

4 670 x 81= 378 270 km .



Dire que la Lune tourne autour de la Terre n'est pas tout à fait exact. Actuellement, la Lune tourne autour du centre de la Terre. Ce sont la Terre et la Lune qui tournent autour du centre de leur masse appelé "barycentre".

La masse de la Terre est 81 (600 /7,3 = 81) fois plus grande que la masse de la Lune, le barycentre est donc 81 fois plus près du centre de la Terre. Il est à environ à 4670 km de ce dernier.

Ainsi Terre et Lune tournent ensembles autour de leur "point d'équilibre". C'est le barycentre de la Terre et de la Lune qui en un an tourne autour du soleil, tandis que la Terre et la Lune tournent autour du barycentre en une période plus courte qui est d'un mois sidéral

Archimède, fils de l'astronome Phidéas, né en 287 avant J.C. à Syracuse (aujourd'hui en Italie, Sicile), fut certainement le plus grand savant de l'Antiquité. Ses découvertes nous ont été transmises par des lettres qu'il a envoyé aux mathématiciens célèbres de son époque.

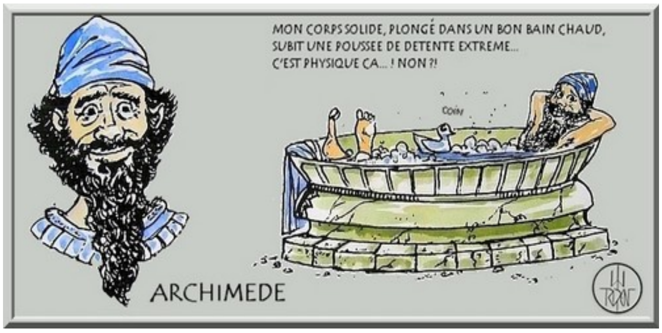
Il a donné une approximation très précise (3,14185) du nombre p.Les géomètres grecs de l'Antiquité savent que la circonférence d'un cercle et son diamètre varient de façon proportionnelle. Le rapport de la circonférence au diamètre reste donc une valeur constante, il s'agit de π.La démarche d'Archimède consiste à encadrer un cercle de rayon 1 par des polygones réguliers dont il sait calculer le périmètre de façon précise.
Il applique cette méthode en prenant des polygones à 96 côtés et obtient une valeur approchée de la circonférence pour en déduire un encadrement de π : $3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7}$

En physique, il étudie la statique, la mécanique, l'hydrostatique et l'optique. Il s'intéresse par exemple aux centres de gravité définis dans son livre sur la mécanique. Et nous lui devons bien sûr, la poussée d'Archimède à qui, il a laissé son nom.

"Tout corps plongé dans un liquide subit de la part de celui-ci, une poussée exercée du bas vers le haut, et égale, en intensité, au poids du liquide déplacé."

Archimède est aussi un fabuleux inventeur de machines de guerre avec lesquelles la ville de Syracuse résistera contre l'envahisseur romain pendant plusieurs années. Il met au point la catapulte qui permet de projeter de lourdes pierres sur les vaisseaux romains, le miroir parabolique que les syracusains utiliseront, dit-on, pour mettre le feu aux voiles des navires. Il a également l'idée des meurtrières, trous de la largeur d'une main taillés dans la muraille pour permettre aux archers de tirer des flèches tout en se protégeant.

Après plusieurs années de siège, les romains réussissent finalement à prendre la ville. Archimède est épargné par le général romain Marcellus. Mais une légende raconte la mort tragique d'Archimède. Le savant traçant des figures sur le sol, est troublé par un soldat romain."Tu déranges mes cercles", dit-il. Celui-ci, vexé, tue Archimède d'un coup d'épée vers 212 Avant Jésus-Christ.



Conclusion :

Le barycentre est essentiellement utilisé pour trouver le point d'équilibre et notamment dans les domaines de la physique. De nos jours, les applications des barycentres ne manquent pas... Les problèmes d'équilibre de balance, de centre de gravité, de centre d'inertie, de moyenne en statistique,la colorimétrie ainsi que les courbes de Bézier sont autant de domaines dans lesquels intervient la notion de barycentre.

Et nous pouvons terminer sur une célèbre citation de notre mathématicien : « Eurêka, j'ai trouvé ».

L'utilisation de la Machine Énigma pendant la guerre

Introduction :

La cryptologie évolue sans cesse et se mêle intimement à l'Histoire, elles s'influencent mutuellement et se confondent parfois. Cette « science du secret » a façonné notre passé en bouleversant l'issue des guerres. La cryptographie et la cryptanalyse ont passionné les savants à travers les siècles. D'abord artisanales, elles se transforment au lendemain de la Première Guerre mondiale.

En 1918, l'Allemagne voit naître une machine hors du commun : Énigma conçue par l'ingénieur Arthur Scherbius. Pour la première fois dans l'histoire de la cryptologie, seule la machine code le message. L'armée allemande s'en empare, pensant détenir un moyen de communication inviolable et produit plus de 50 000 machines Énigma. Ainsi nous vient la question suivante :

En quoi Énigma a-t-elle bouleversé la cryptologie, tout en influençant grandement le cours de la Seconde Guerre mondiale ?

Présentation de la machine :

Énigma se présente sous la forme d'une caisse en bois de 34×28×15 cm, et pèse une douzaine de kilos. Elle ressemble à une machine à écrire et est composée
- d'un clavier et d'un tableau lumineux de 26 lettres
- de trois rotors montés sur des axes avec 26 positions possibles
- d'un pupitre de connexion installé entre le clavier et le premier rotor, dont le rôle était de réaliser un premier échange de lettres en fonction de la manière dont on positionnait les connexions
- d'un réflecteur qui permettait de rendre la cryptographie et la cryptanalyse possibles sur la même machine.

Cette machine a comme particularité que, même si elle tombe entre les mains ennemies, sa sécurité n'est pas compromise.
En effet, la machine possède un nombre très important de réglages qui font sa force. Les Allemands changeaient ces réglages chaque jour à minuit, ce qui rendait la tâche de décryptage quasi impossible aux Alliés.

Fonctionnement de la machine :

La préparation de la machine est la première chose à faire, elle consiste en 3 étapes :

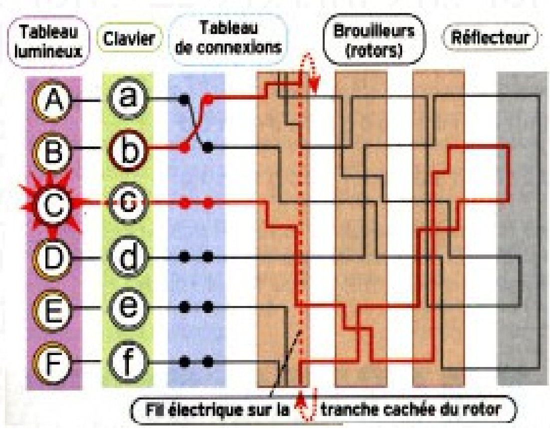
1) Placer les 6 fils dans le tableau de connexion. Ceux-ci permettent d'intervertir jusqu'à 6 paires de lettres avant la connexion aux rotors. Ces interversions permettent donc d'apporter
$(26!/(12! \times 14!) \times (12!/6!)/26) =$ 100 391 791 500 possibilités
2) Choisir l'ordre des 3 rotors disponibles. Cet ordre apporte 3! = 6 combinaisons supplémentaires
3) De plus, les rotors peuvent être positionnés avec 26 rotations différentes ce qui apporte 26^3 = 17 576 combinaisons
En tout il y a donc : 6 × 17 586 × 100 391 791 500 = 10 586 916 764 424 000 possibilités soit 10^{16} possibilités .

Le principe de base des machines Enigma conçues par Scherbius repose sur l'utilisation de rotors qui transforment l'alphabet clair (noté en minuscules) en alphabet chiffré (en majuscules). Pour mieux l'illustrer, nous nous limiterons à un alphabet de six lettres. Voici le schéma équivalent qui permet de mieux suivre l'opération "avec les doigts".

Le tableau de connexions permet de brouiller les pistes en reliant deux lettres du clavier entre elles (ici a et b). Ainsi, quand on tape b, le courant prend en fait le circuit prévu pour a. Les trois brouilleurs associés multiplient ainsi le nombre de combinaisons. Le deuxième et le troisième avancent respectivement d'un cran quand le premier et le deuxième ont fait un tour complet.

Quant au réflecteur, il renvoie le courant dans le dispositif jusqu'au panneau lumineux où la lettre cryptée s'affiche. Son rôle n'est pas d'augmenter le nombre de combinaisons possibles, mais de faciliter considérablement la tâche du destinataire. En effet, si b devient C dans notre exemple (en rouge), on a aussi c devient B. Et c'est valable pour toutes les paires de lettres claire/cryptée.

Conséquence: si le mot effacé est chiffré ACBFEB par l'émetteur, il suffira à l'opérateur qui reçoit le message crypté de taper acbfeb sur son clavier pour voir les lettres E, F, F, A, C, E s'allumer. Seule condition: les deux opérateurs distants doivent avoir réglé leur machine Enigma de la même façon



Son déchiffrage pendant la guerre.

Rejewski, mathématicien polonais de 23 ans se mit à essayer de déchiffrer Enigma et, avec un réseau extraordinaire de déductions, parvint à réduire à 105 456 le nombre de clés possibles. Il créa ensuite la machine Bomba qui permit de déchiffrer n'importe quel message dans les 24 heures.

En 1939 la Pologne se fait envahir par les Allemands, les Polonais livrent alors leurs découvertes et leurs machines aux Britanniques. Ceux-ci décident alors de regrouper leurs unités de cryptanalystes dans une propriété nommée Bletchley Park. Parmi eux : Alan Turing qui créa la machine Bombe (ancêtre de l'ordinateur) capable de tester 1 054 650 combinaisons en moins de 5 heures.

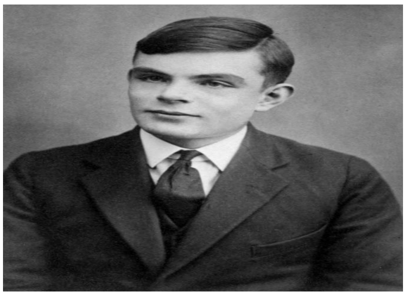
Biographie d'Alan Turing :

Mathématicien anglais, Alan Turing a anticipé la programmation des premiers ordinateurs avec sa "machine de Turing". Durant la Seconde Guerre mondiale, il a décrypté la machine allemande Enigma.

Né le 23 juin 1912 à Paddington, Alan Mathison Turing est un célèbre mathématicien anglais. Élève surdoué et précoce, son génie est vite repéré par ses proches et ses professeurs : il aurait appris à lire seul en trois semaines. Sa passion pour les études est même couverte par la presse, le jeune garçon de 13 ans ayant parcouru 90 km à vélo pour rejoindre son école un jour de grève générale. Visionnaire, il est le créateur de la "**Machine de Turing**", une expérience de pensée et de concepts de programmations qui prendront corps avec la création des ordinateurs, quelques années plus tard.

Dès 1938, Alan Turing est recruté par le gouvernement britannique et se spécialise dans la cryptanalyse. Au sein des services secrets, le scientifique est chargé de déchiffrer la machine Enigma utilisée par l'armée allemande. Sa mission et celle de son équipe est d'améliorer la "Bombe", une machine polonaise qui permet de tester rapidement différentes combinaisons, afin d'obtenir les clés de décodage.

En 1951, il est admis à la Royal Society et l'année suivante, Alan Turing crée un programme de jeu d'échecs, mais aucune machine n'est assez puissante pour le lire !



En 1952, Alan Turing est victime d'un cambriolage. L'enquête de police relie cette affaire à un ancien amant du scientifique.
Son homosexualité est alors incriminée et lui vaut d'être condamné à la castration chimique pendant un an. Son corps et son mental subissent d'importants changements durant cette période.
En 1953, après avoir suivi ce lourd traitement, il reprend ses travaux scientifiques, mais se suicide par empoisonnement le 7 juin 1954 à Wilmslow.

La faiblesse d'Enigma était qu'une lettre ne pouvait pas donner la même lettre une fois chiffrée en raison du réflecteur. Certains opérateurs allemands (en particulier ceux de la météo) commençaient tous leurs messages par les mêmes mots (« Mon général… »). Les Britanniques connaissaient ainsi, pour une partie du message, à la fois le texte clair et le texte codé, ce qui aida à retrouver la clé .

Grâce à la bombe ainsi qu'à l'intelligence des mathématiciens, un message pouvait être décrypter en seulement 20 minutes. C'est ainsi qu'une énorme quantité de messages codés nazis ont pu être interceptés par les alliés et ont pu permettre leur victoire.

Conclusion :

La machine Énigma, et surtout son décryptage, a donc bouleversé le monde de la cryptologie ainsi que les conditions de la victoire alliée. L'invention de Scherbius marque la fin des méthodes manuelles et artisanales de codage ; après 1918, tous les efforts des cryptographes sont tournés vers la mise au point de machines de plus en plus perfectionnées, à même de crypter de manière sûre.

Les mathématiciens polonais puis Alan Turing appliquent, dans l'urgence de la situation, des théories que l'on croyait inutiles pour le décryptement. Le monde prend alors conscience que seules les mathématiques, et non la chance, peuvent casser les codes produits par une machine.

En plus d'avoir conduit à la création des premiers ordinateurs, le travail des cryptanalystes anglais a joué un rôle très important dans la stratégie alliée : les avancées de Bletchey Park ont permis d'anticiper et de vaincre la tactique des armées hitlériennes, ce qui a évité de nombreuses pertes humaines et économiques.

Certains historiens estiment que la connaissance des messages transmis par Énigma a réduit la durée de la Seconde Guerre mondiale de deux ans. Nous pouvons découvrir cette machine dans le très bon film « Imitation Game », avis aux amateurs.

Autour de la Règle de l'Hôpital .

Introduction :

Dans les calculs de limites de fonctions, nous avons vu parfois certaines indéterminations. Des méthodes peuvent enlever l'indétermination comme parfois multiplier par l'expression conjuguée ou encore prendre le terme de plus haut degré.

Ces astuces permettent souvent de le faire lorsqu'on souhaite calculer une limite en l'infini. Mais il se peut qu'une forme indéterminée soit présente lors d'un calcul de limite en un réel .Notre exposé répondra à la question suivante :

Comment peut-on enlever certaines formes indéterminées notamment $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$?

Cette règle de l'Hôpital date du 17^{e} siècle et porte le nom du Mathématicien Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital Voici quelques informations autour de ce personnage.

Guillaume de 'L'Hôpital (1 661 – 1 704) est un élève de Jean Bernoulli qui lui apprend le calcul différentiel. C'est ainsi que L'Hôpital est le premier à écrire un traité sur ce nouvel outil, le livre « ***Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes (1696)*** ». C'est dans ce livre qu'apparaît pour la première fois la célèbre règle de L'Hôpital, qui permet parfois de lever des formes indéterminées du type 0/0. En 1707, est publié également un traité sur les coniques à titre posthume : **«Traité analytique des sections coniques »**, qui sera pendant un siècle un classique du genre. Ce traité était presque fini à son vivant, lorsqu'au commencement de 1704 il fut pris d'une fièvre qui ne paraissait d'abord aucunement dangereuse mais qui détermina une attaque d' apoplexie (hémorragie cérébrale) dont il mourut un 2 Février 1 704.

Cependant, cette règle serait en fait due à Jean Bernoulli, qui l'aurait découverte deux ans plus tôt. L'auteur de la règle est sans doute Jean Bernouilli, car L'Hôpital payait à Bernoulli une pension de 300 livres par an pour le tenir informé des progrès du calcul infinitésimal, et pour résoudre les problèmes qu'il lui posait (comme celui de trouver la limite des formes indéterminées) ; de plus, ils avaient signé un contrat autorisant L'Hôpital à utiliser les découvertes de Bernoulli à sa guise

L'Hôpital à gauche
Jean Bernoulli à droite

Énoncé de la Règle de l'Hôpital :

On note a un nombre réel, f et g deux fonctions dérivables dans un intervalle ouvert contenant a et telles que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ou si $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$, alors $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$

Cette règle s'applique également aux calculs de limites lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Remarque : Ce théorème ne s'applique que dans des cas d'indétermination, comme $\frac{0}{0}$ **ou** $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemples :

1) Calculer la limite en 2 de la fonction suivante : $u(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

On pose $f(x) = x - 2$ et $g(x) = x^2 - 4$. On a $f(2) = 0$ et $g(2) = 0$.
Donc en calculant la limite de la fonction h en 2, nous obtenons une forme indéterminée 0/0.
En appliquant la règle de L'Hôpital, nous avons :

$f'(x) = 1$ et $g'(x) = 2x$. Donc : la limite de $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1}{2x}$ en 2 est donc égale à 1 / 4 .
Donc par la règle de L'Hôpital, la limite de u en 2 est égale à 1 / 4 .

2) Calculer la limite en 0 de la fonction suivante : $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

On a également $1 - \cos(0) = 0$ et $0^2 = 0$ donc nous obtenons une forme indéterminée 0 /0 . En appliquant la règle de L'Hôpital, nous avons donc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$$

Or $\sin(0) = 0$ et $2 \times 0 = 0$, nous avons encore une forme indéterminée, nous appliquons une deuxième fois la même règle en dérivant, on obtient alors :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion :

En conclusion, nous pouvons enlever l'indétermination grâce à la règle de l'Hôpital. Celle-ci consiste à évaluer la limite du quotient des dérivées ce qui nous permet de trouver alors la limite du quotient des fonctions initiales. Pour cela, il faut avant tout vérifier la dérivabilité de chacune de ses fonctions . Comme dirait de nombreux professeurs de Maths avec humour : « "La règle de L'Hospital ? A n'utiliser qu'en cas d'extrême urgence!".

Autour de la formule du Binôme de Newton

Introduction :

La formule du Binôme de Newton est en lien avec les coefficients binomiaux qui sont très utilisés dans le calcul de probabilités ou de dénombrement. Newton a été un grand mathématicien anglais qui a découvert une formule permettant de développer rapidement des puissances de certains nombres. On pourrait se poser la question suivante :

Quelles sont les différentes utilisations de la formule du Binôme de Newton ?

Énoncé de la Formule du Binôme de Newton :

Soit un binôme composé des nombres x et y , et un entier naturel n , on a la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$ où les nombres $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

(parfois aussi notés C_n^k) sont les coefficients binomiaux.

Démonstration de la formule du Binôme de Newton par récurrence :

Initialisation : si $n=0$, $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. La propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{\substack{\ell=1 \\ (\ell=k+1)}}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n-\ell+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{changement d'indice} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ \text{(on revient à} \\ \text{la lettre } k)}}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + a^{n+1}b^0\right) + \left(a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}\right) && \text{extraction de termes} \\
&= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} \\
&= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} && \text{formule de Pascal} \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 && \text{car } \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{regroupement}
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

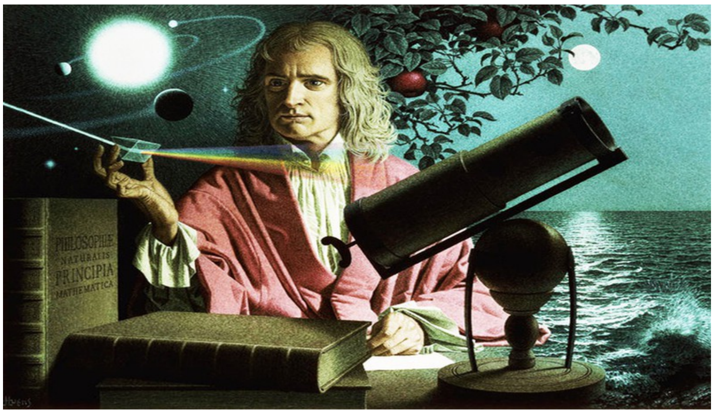
Mais qui est ce célèbre Newton ?

Isaac Newton est un scientifique britannique né entre le 25 décembre et le 4 janvier 1643 à Woolsthorpe Manor au Royaume-Uni et mort entre le 20 et le 31 mars 1727 à Westminster, Londres, au Royaume-Uni.

Il est considéré comme l'un des plus grands scientifiques de tous les temps en raison de ses nombreuses découvertes importantes. Il est surtout reconnu pour avoir énoncé la théorie de la gravitation universelle, créé le calcul infinitésimal, décrit la diffraction de la lumière et conçu le télescope.

Newton est le fondateur de la mécanique, domaine de la physique qui étudie le mouvement. Il a expliqué le principe de la gravitation et les trois lois universelles du mouvement (principe d'inertie, principe de l'action et de la réaction, proportionnalité des forces et des accélérations).

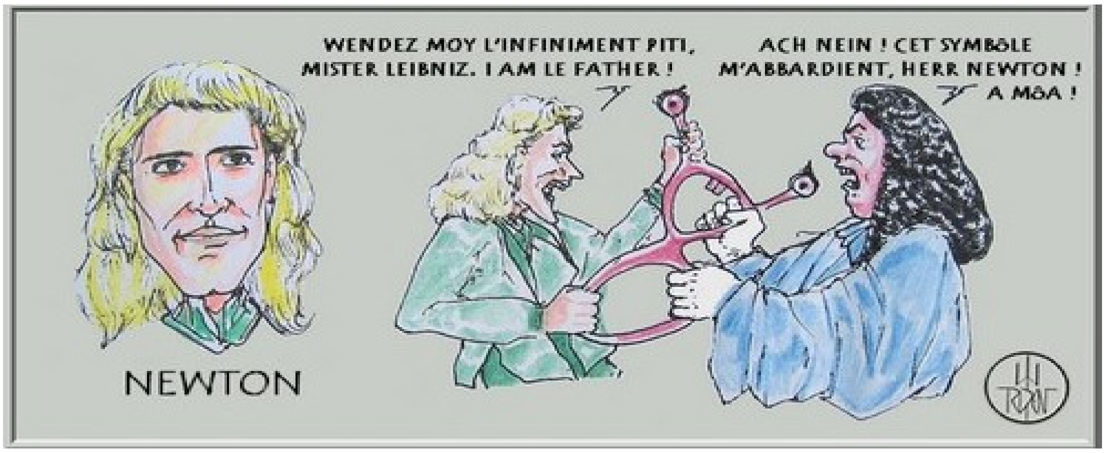
Newton a contribué à développer l'analyse, grâce à son invention du calcul infinitésimal. Il est aussi connu pour la formule du binôme de Newton, la méthode de Newton qui permet de trouver les nombres qui donnent zéro par une fonction, sa formule pour calculer π et son étude des courbes cubiques (définies par une fonction de degré trois).



Newton a inventé un type de télescope qui porte son nom : le télescope newtonien. Il s'agit d'un télescope à miroir qui permet d'éviter les défauts des lunettes astronomiques à lentilles.

En 1677, il a énoncé comme principe que le mouvement des objets célestes obéit aux mêmes lois que les objets sur Terre. Il applique donc ses lois du mouvement et sa loi de la gravitation aux planètes du système solaire. En utilisant le calcul différentiel, il retrouve les lois de Kepler. Encore mieux : la mécanique newtonienne arrive à prédire les mouvements des astres. Quand Edmond Halley prédit le retour de la comète qui portera son nom, c'est le triomphe !

Il tombe malade en 1724 et souffre de la goutte. Il meurt chez lui le 31 mars 1727 à l'âge de 84 ans.



Cette formule peut s'appliquer dans différentes situations mathématiques.
La première application de cette formule est le développement d'expressions littérales comme par exemple : $(1+x)^3$ ou encore $(2+4x)^7$.

Pour trouver les coefficients binomiaux, nous pouvons nous servir du célèbre triangle de Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Ainsi :

$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x + x^4$

Remarque : **La formule permet aussi de démontrer plus facilement la formule donnant le nombre de parties d'un ensemble à n éléments .**

On rappelle la propriété :

> Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal 2^n soit $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

La démonstration en devient évidente avec la formule du binôme de newton, il suffit de l'appliquer en prenant x = y = 1 .

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Conclusion :

Pour conclure, Newton a été un grand scientifique dans l'humanité et sa célèbre formule a pu simplifier certains calculs et a même été utilisée dans le calcul des probabilités.

Comment les Mathématiques permettent-elles de modéliser les jeux de hasard ?

Introduction :

Le plus souvent on ne parle de hasard que pour indiquer que l'on ne l'a a pas fait exprès : « Je ne l'ai pas voulu, c'est arrivé par hasard ». C'est donc une excuse et elle parait assez convaincante, car nous sommes tous dans des sociétés d'esprit scientifique, employant des mots scientifiques. Or le hasard est une invention de la science et l'emploi du mot est donc assez récent. En effet, il n'existe aucun mot pour traduire « hasard » en latin, en grec, en hébreu, en chinois, etc.

La définition du hasard la plus défendable est : « état d'un système où les événements se produisent avec une fréquence égale à leur probabilité ». Et l'on pense aussitôt au jeu de dés (aléa, en latin, d'où aléatoire, qui ne relève que du hasard), « hasard » viendrait d'un mot arabe désignant un jeu de dés (*Al Shar*) ramené de Palestine lors des Croisades.

Mais l'étude du hasard mathématique, du calcul des probabilités et des statistiques, nous montre que cette définition n'est exacte qu'à la limite, selon la loi des grands nombres. Un bon dé doit avoir une chance sur six de tomber sur chaque face, s'il n'est pas pipé. Mais toute expérience facile et immédiate avec une pièce de monnaie ordinaire, montre que sur dix coups, on n'obtient jamais 5 piles 5 faces.

Les Mathématiques permettent de dénombrer les résultats d'un jeu de hasard afin d'en obtenir les probabilités. On peut ainsi élaborer des stratégies afin d'optimiser les gains. Nous allons donc nous poser la question suivante :

> Quels sont les jeux les de hasard les plus avantageux pour les joueurs pour remporter le gros lot ?

Un peu d'Histoire pour commencer en présentant le mathématicien Pascal et son fameux triangle :

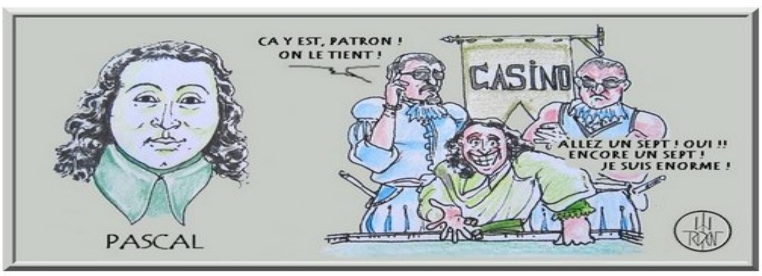
Pascal, l'un des plus grands génies et des plus remarquables écrivains français du XVII^{e} siècle le est né à Clermont-Ferrand le 19 juin 1623. Il perd sa mère à l'age de 3 ans. Son père, *Étienne Pascal*, passionné de Maths, président à la Cour des aides de Clermont, se retire à Paris en 1631, pour s'occuper pleinement de l'instruction de son fils. Dans ce contexte, le jeune *Pascal* prend rapidement un goût vif pour les mathématiques.

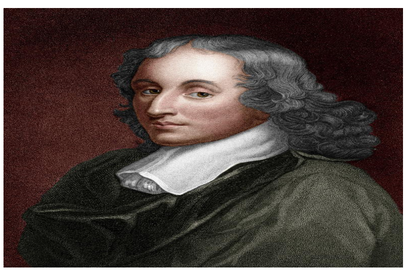
Un peu après , *Pascal* construit et fait fabriquer une machine arithmétique (appelée la Pascaline) pour simplifier des calculs en particulier des additions. Il est aussi à l'origine du principe, appelé aujourd'hui « principe de Pascal », qui établit qu'un fluide n'est pas compressible. Si on lui fait subir une pression, celle-ci se transmet intégralement sur les parois du récipient qui le contient. En hommage à ses travaux, son nom sera donné à une unité de pression.

En 1654, il entretient avec Pierre de Fermat des correspondances sur le thème des jeux de hasard qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités. Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme par exemple celui du *Chevalier de Méré* : « Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »

La même année, il fait la découverte d'un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui **"triangle de Pascal"**. Son but est d'exposer mathématiquement certaines combinaisons numériques dans les jeux de hasard et les paris. C'est en effet au mathématicien JIA Xian (1010 - 1070) que l'on doit la plus ancienne utilisation de ce triangle arithmétique,

Et c'est aussi à l'occasion du *"Traité sur le triangle arithméthique"* qu'il prononce pour la première fois le principe du raisonnement par récurrence. Il écrit aussi un chef d'oeuvre de la littérature, "Les Pensées", qui est une apologie de la religion chrétienne. Sa mort prématurée à l'âge de 39 ans, le 19 Août 1662 suite à un cancer de l'estomac, l' empêche de le mener à son terme. La première publication des *"Pensées"* date de 1670.





1) 3 jeux de hasard, quel est le meilleur ?

a) Le loto

Sur un projet élaboré par Maurice Caradet, à la tête de la Loterie Nationale Française, depuis le 16 septembre 1974, le Loto, jeu national, est né en France en 1975 d'un décret signé par Jacques Chirac, Premier ministre, et Jean-Pierre Fourcade, ministre de l'Économie et des Finances. Ce jeu fait partie de la française des jeux.

Un tirage du loto s'effectue tous les semaines le mercredi et le samedi. Lorsqu'on joue au loto, sur une grille, on choisit 5 numéros parmi 49 numéros possibles de 1 à 49 et un numéro « chance » parmi 10 numéros de 1 à 10. les gains s'échelonnent en fonction du nombre de numéros trouvés.

Nous gagnons le gros lot si tous les numéros que l'on a choisi sortent. Pour cela, l'ordre ne compte pas et il n' y a qu'une boule pour chaque numéro. Pour trouver le nombre de grilles possibles, nous devons faire appel à un calcul de combinaisons, le voici :

$$\binom{49}{5}\times\binom{10}{1} = \frac{49\times48\times47\times46\times45}{5\times4\times3\times2\times1}\times\frac{10}{1}$$ = 19 068 840 grilles possibles.

Nous avons donc 1 chance sur 19 068 840 pour trouver la grille gagnante.

b) Le quinté

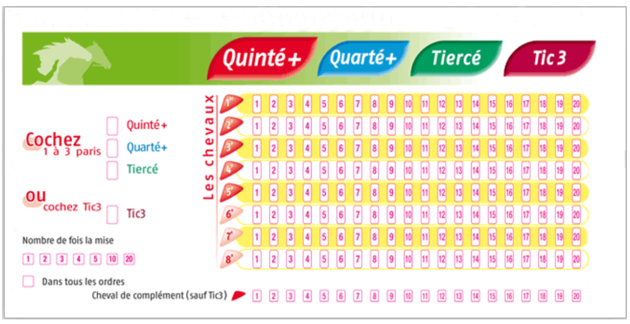
Le Pari mutuel urbain (PMU) est une entreprise française de paris hippiques (courses de chevaux). À l'origine organisés de façon sauvage par des bookmakers, les paris sur les hippodromes vivent sans structure. En 1891, Joseph Oller invente la mutualisation des paris. La loi du 2 juin 1891 met fin à l'arbitraire des bookmakers car elle repose sur un principe simple : les parieurs jouent les uns contre les autres et les sommes jouées sont partagées entre les gagnants. C'est le début du pari mutuel.

Par la loi du 16 avril 1930, les Sociétés de Courses, seuls organismes habilités depuis 1891 à organiser les courses de chevaux et à vendre des paris, reçoivent l'autorisation d'enregistrer les paris à l'extérieur des hippodromes exclusivement sous forme mutualiste. Elles créent alors un service commun, le Pari Mutuel Urbain.

Le quinté existe depuis seulement 1 989 .

Pour gagner au quinté, le principe est de trouver les 5 premiers chevaux de l'arrivée parmi les 20 participants en précisant l'ordre . Comme l'ordre compte, pour trouver le nombre de possibilités possibles, il faut calculer un 5-arrangement soit : 20 x 19 x 18 x 17 x 16 = 1 860 480 classements possibles.

Il y a donc 1 chance sur 1 860 480 de trouver les 5 chevaux gagnants dans l'ordre.



c) Classement de joueurs de tennis dans un tournoi de Grand Chelem.

Le tournoi de Roland-Garros propose à l'ensemble de ses visiteurs de participer à un jeu concours. L'objectif est de déterminer à partir du tableau des 8 e de finale, le classement exact des 16 joueurs encore en lice.

> Roland-Garros fait partie des quatre tournois du Grand Chelem. C'est un tournoi de tennis sur terre battue créé en 1925 et qui se tient annuellement depuis 1928 à Paris pendant les mois de Mai et de Juin dans le stade Roland-Garros. Rafael Nadal est l'un des plus grands vainqueurs de ce tournoi avec à son actif 13 victoires.

Pour trouver le nombre de classements possibles, chaque joueur possède une unique position dans le classement, et on veut que tous les joueurs soient présents dans le classement.
On a donc affaire à un arrangement total , c'est à dire une **permutation**.

D'après le cours, nous savons que le nombre de permutations d'un ensemble à 16 éléments est égal à 16 !
donc il y a 16 ! = 20 922 789 888 000 classements possibles.

Nous avons donc 1 chance sur 20 922 789 888 000 classements possibles à partir des 8 e de finale.

Conclusion :

Nous avons vu qu'il y avait différentes méthodes pour dénombrer comme les arrangements, les permutations ou encore les combinaisons. Il faut toujours bien définir la situation à laquelle nous sommes confrontés : y-a-t-il un ordre précis ? A-t-on le droit à la répétition ?
Après différents calculs, parmi les 3 jeux proposés, nous pouvons résumer qu'il y avait
- 1 chance sur 19 068 840 pour le Loto.
-1 chance sur 1 860 480 pour le Quinté.
-1 chance sur 20 922 789 888 000 pour le tournoi de Roland-Garros.

On en déduit que le jeu le plus avantageux est donc le quinté Tout ceci relève du hasard, et parfois, on peut gagner du premier coup. Heureusement, les différents jeux évoqués proposent des lots moins intéressants mais avec des conditions plus faciles pour les gagner. Terminons notre présentation par une très belle devise de Pierre de Coubertin : « L'important n'est pas de gagner mais de participer »