Séquence 13

Fonction exponentielle

Contenu :

- Définition et propriétés de la fonction exponentielle.
- Courbe représentative.
- Dérivée.
- Lien avec les suites géométriques.

I. Définition de la fonction exponentielle

Activité 1 et 2 : Introduction de la fonction exponentielle, méthode d'Euler.

A. Définition

Définition et propriété : Il existe une unique fonction f dérivable sur R telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle. On la note fonction **exp.**

Démonstration : L'existence d'une telle fonction est admise.

Pour démontrer l'unicité, parcours 3 p. 184. (Tache différenciée)

Propriétés :

- ✓ La fonction exponentielle est dérivable sur R et pour tout réel x, la fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée : $\mathbf{exp}'(x) = \mathbf{exp}(x)$
- ✓ La fonction exponentielle est strictement positive et croissante sur R.

Démonstration : parcours 4 p. 184 (tache différenciée)

Application de la définition : Déterminer la fonction f définie et dérivable sur R tel que $f' = f$ et $f(0) = 3$

B. Propriétés algébriques

Propriétés : Pour tout réel a et b, et tout entier naturel n :

1) $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

2) $\exp(-a) \times \exp(a) = 1$ donc $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$

3) $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

4) $\exp(na) = \left(\exp(a)\right)^n$

Démonstrations : Exercice 131 et 132 p 184

C. La notation e^x

Définition : On note $\exp(1) = \mathrm{e}$ ou e est un nombre réel non rationnel tel que e≈ 2,718281828

Propriété (admise) : Pour tout nombre entier relatif n ,

$\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n = e^n$.

Par extension, pour tout nombre réel x , $\exp(x) = e^x$.

Application : réécrire les propriétés de la fonction exponentielle avec cette nouvelle notation.

Exemples et utilisation de la calculatrice :

Exercices d'applications : Capacité 1 et 2 p 169 ou exercices 44 et 59. (propriété algébrique et signe d'une expression avec des exponentielles)

II. Applications de la fonction exponentielle

A. Variations et courbe représentative de la fonction exponentielle

Activité 3 et 4 p. 167 : croissance exponentielle et représentation graphique

La fonction exponentielle est croissante sur R et strictement positive.

Démonstration :

Représentation graphique de la fonction exponentielle

Equation de la tangente à la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

Tableau de variation de la fonction exponentielle

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur R

- Deux images égales ont nécessairement le même antécédent
- Deux nombres et leur image sont classés dans le même ordre.

On déduit les deux propriétés suivantes permettant de résoudre des équations et inéquations avec la fonction exponentielle.

Propriétés

1) $e^a = e^b$ $equivaut$ à $a = b$

2) $e^a < e^b$ $equivaut$ à $a < b$

3) $e^a > e^b$ *equivaut* à $a > b$

Exemples :

Exercices d’application :

B. Fonctions $x \to e^{ax+b}$

Propriété : Pour tous réels a et b fixés, la fonction f définie sur R par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur R, et pour tout réel x , $f'(x) = ae^{ax+b}$

Démonstration :

Exemples :

Exercices d’application : capacité 5 ou

C. Suites de terme général e^{na}

Propriété : Pour tout réel a, la suite de terne général e^{na} est géométrique.

Démonstration :

Exemples :