Séquence 9

Calcul vectoriel et produit scalaire

I. Produit scalaire de deux vecteurs

A. Définition avec angle et normes :

Définition : On appelle produit scalaire de deux vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ (Se lit : u scalaire v) tel que :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

Exemple : Tracer un vecteur $\overrightarrow{AC}$ de norme 2cm et un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de norme 3cm tel que $\widehat{CAB} = 60°$.

Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Capacité 1 p 223 :

Propriété 1 : On appelle **carré scalaire** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ la quantité $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AB}$ et on la note $\overrightarrow{AB}^2$.

On a : $\overrightarrow{\mathbf{AB}}^2 = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\|^2 = \boldsymbol{AB^2}$

Démonstration :

Propriété 2 : Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires :

- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, on a $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC$.
- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire, on a $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$.

Démonstration :

B. Définition à partir du projeté orthogonal.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de même origine. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$
- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$

Exercice : Réaliser deux figures illustrant les deux cas précédents.

Démonstration :

Capacité 2 p 223 :

II. Propriétés du produit scalaire :

A. Bilinéarité et Symétrie :

Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs, et λ un réel. Alors,

1. Le produit scalaire est symétrique : $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$ (1)

2. Le produit scalaire est <u>bilinéaire :</u>

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (2)
- $\left(\overrightarrow{\lambda u}\right) \cdot \vec{v} = \vec{\lambda}(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (3)

<u>Démonstration :</u>

- La propriété (1) résulte de la définition du produit scalaire.
- Les propriétés (2) et (3) sont admises.

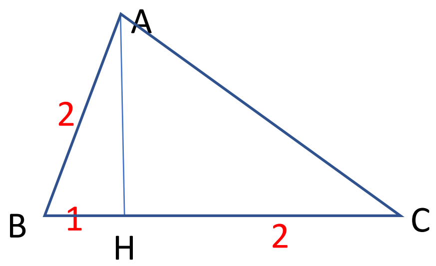
<u>Remarques :</u>

- La propriété (2) se généralise :

$\left(\vec{u} + \overrightarrow{u'}\right) \cdot \left(\vec{v} + \overrightarrow{v'}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{u'} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{v'}$.

- Ces propriétés permettent d'effectuer des opérations sur le produit scalaire comme le produit et la somme de quantité algébrique.

<u>Exemple d'application :</u> En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}\right).\overrightarrow{AB}$ et $\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right).\overrightarrow{AB}$.



B. Caractérisation de l'orthogonalité :

Définition : On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et trois points A, B, C tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Théorème 3 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

Alors $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$.

Démonstration :

III. Autres définitions du produit scalaire :

A. Expression en base orthonormée du produit scalaire :

Théorème : Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$, on considère deux vecteurs $\vec{u}\ (x;y)$ et $\overrightarrow{u'}$ $(x';y')$.

Alors $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \overrightarrow{u'} = xx' + yy'}$

Démonstration : Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnée $(x;y)$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ d'où $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$

Ainsi $\vec{u}.\overrightarrow{u'} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}).(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$

$$= \overrightarrow{xx'\imath} \cdot \vec{\imath} + xy'\vec{\imath}\,.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}\,.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}\,.\vec{\jmath}$$

$$= xx$$

Or $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux d'ou $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} = 0$, et $\|\vec{\imath}\,\| = 1$, $\|\vec{\jmath}\,\| = 1$, d'où la relation recherchée.

Exemple : soit les vecteurs $\vec{u}\ (1;5)$ et $\vec{v}\ (2;3)$ dans une base orthonormée du plan.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Capacité 4 p 225 :

B. Expression de la norme en base orthonormée :

Propriété : Soit un vecteur $\vec{u}\ (x; y)$ dans une base orthonormée.

On a $\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2})}$

Démonstration :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\,.\vec{u}}$. D'après le théorème précèdent $\vec{u}\,\vec{u} = xx + \ yy = x^2 + y^2$ d'où le résultat.

C. Critère d'orthogonalité dans une base orthonormée :

Théorème : Dans une base orthonormée, on considère les vecteurs $\vec{u}\ (x; y)$ et $\overrightarrow{u'}\ (x'; y')$.

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** équivaut à dire que $\boldsymbol{xx' + yy' = 0}$.

Démonstration :

Exemple : On considère les vecteurs $\vec{u}\ (1; 2)$ et $\vec{v}\ (4; -2)$ dans une base orthonormée.

Calculer les normes de chaque vecteur et prouver leur orthogonalité.

Capacité 5 p 225 :