Séquence 4

Limites de fonctions – Partie 2

I. Limite d'une fonction composée

Activité 4 p. 165 : introduction de la notion de fonction composée et de sa limite

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{2-\frac{1}{x}}$

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x} = 2$

Donc, comme limite de fonction composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2-\frac{1}{x}} = \sqrt{2}$

On peut en effet poser $X = 2-\frac{1}{x}$ et calculer $\lim\limits_{X\to2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

Propriété

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{X\to b} g(X) = c \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$

Applications : capacité 5 et 6 p. 171 et exercices

II. Limites et comparaisons

A. Théorèmes de comparaisons

Théorème :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a\ ;\ +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (figure 1)
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (figure 2)
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ (figure 3)
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (figure 4)

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction f pousse la fonction g vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.

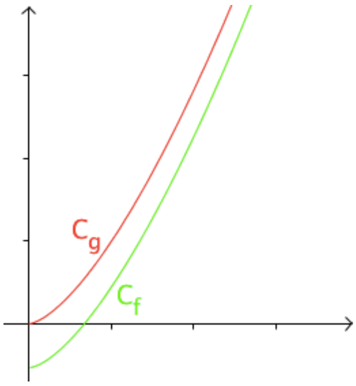


Figure 1

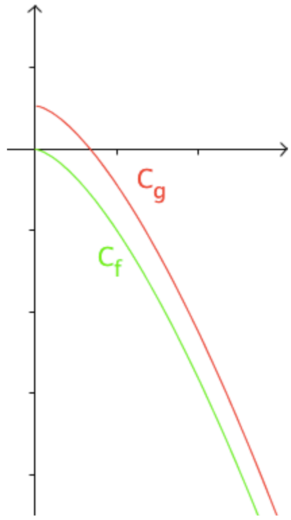


Figure 2

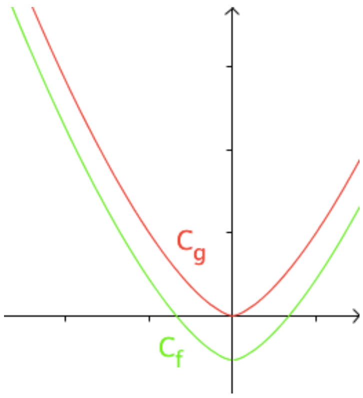


Figure 3

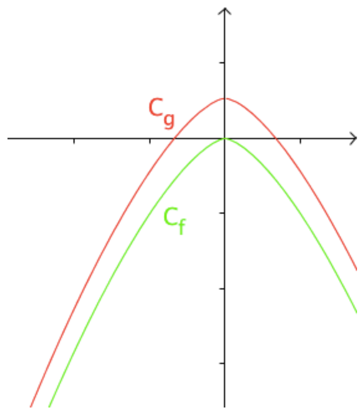


Figure 4

Démonstration dans le cas de la figure 1 :

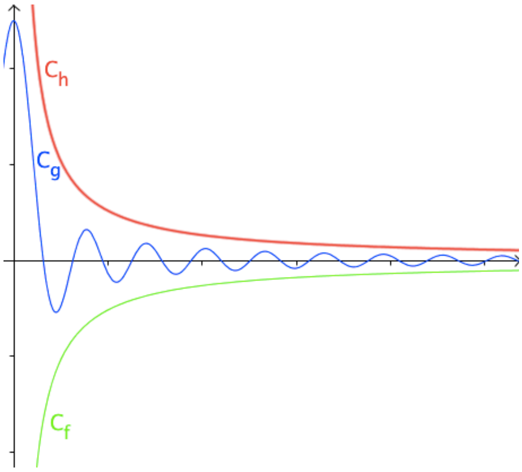
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m\ ;\ +\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) > m$.
Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leq g(x)$.
Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) > m$.
Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

B. Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes :

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a\ ;\ +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$.

Remarque : On obtient un théorème analogue en $-\infty$.



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

Applications et méthodes : capacité 7 p. 173 et exercices

III. Croissance comparée

A. Limites aux bornes de la fonction exponentielle

Propriétés :

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration : (p. 168)

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction contenant des exponentiels

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x + e^{-3x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$

B. Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\, e^x = 0$

Démonstration au programme du a : p. 172

Applications et méthodes : capacité 8 p. 173 et exercices