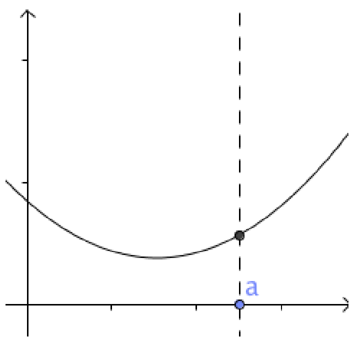
Séquence 8

Continuité

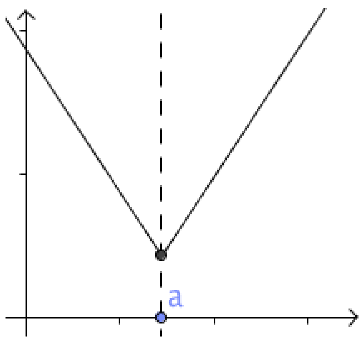
I. Continuité et applications

Activité 1 p. 200 : découvrir la notion de continuité

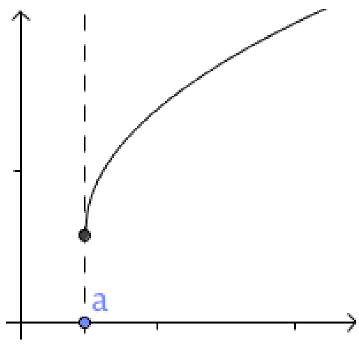
A. Exemples et contre exemples



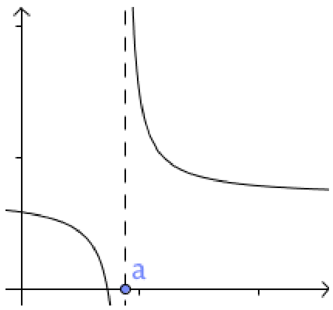
f est continue en a



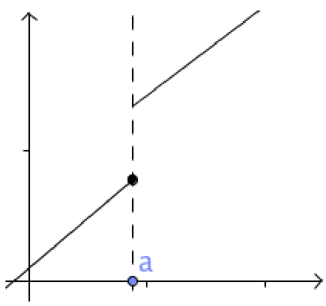
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

B. Définition et propriétés

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.
- f est continue en a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Propriétés (admises) :

- Les fonctions $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

- Les fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.
- La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\ ; 0[$ et elle est continue sur $]0\ ; +\infty[$.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur chacun des intervalles formant leur ensemble de définition.

Exemples :

Remarque :
Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème (admis) : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.
Remarque :
La réciproque de cette propriété est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue sur R, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Méthode : Étudier la continuité d'une fonction
Capacité 1 p. 203 et exercices

C. Continuité et suites convergentes

1) Image d'une suite convergente par une fonction continue

Théorème(admis):
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L de I alors $f(L) = L$.

Méthode : Étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$.

1) Dans un repère orthonormé, on considère la fonction f définie par
$f(x) = 0{,}85x + 1{,}8$.
   a) Tracer les droites d'équations respectives $y = 0{,}85x + 1{,}8$ et $y = x$.
   b) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.
   c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).
2) En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.

Exercices d'applications : capacité 2 p. 203 et exercices

Tuto calculatrice :

Afficher la représentation graphique sur la calculatrice

2) Variation d'une suite à l'aide d'une fonction associée

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.

- Si f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Méthode : Étudier les variations d'une suite à l'aide de sa fonction associée

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n+1}$.

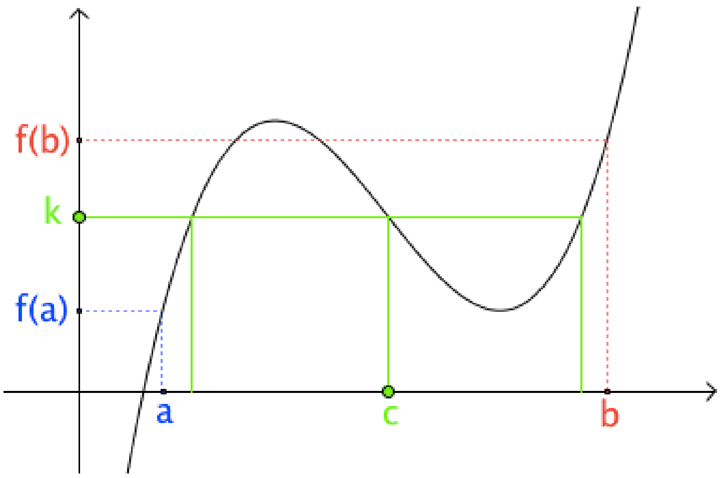
Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

III. Equation $f(x) = k$ avec f continue

A. Théorème des valeurs intermédiaires

Activité 3 p. 201 : découvrir le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :
On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Conséquence :
Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Cas particuliers :
- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ alors le réel c est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Exercices d'applications : capacité 3 p. 205 et exercices

B. Méthode d'encadrement de la solution de l'équation

1) A l'aide de la calculatrice, par balayages successifs en augmentant la précision

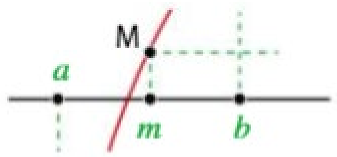
Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2,5\,;\,5]$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.

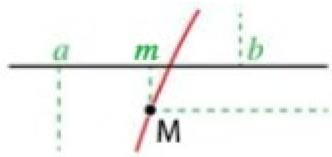
2) Méthode de dichotomie

L'encadrement d'une solution par dichotomie consiste à déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution α, en divisant par deux l'amplitude de l'intervalle à chaque étape.

Pour cela, on calcule le milieu m de l'intervalle $[a; b]$ puis on regarde si la solution α se trouve dans $[a; m]$ ou bien dans $[m; b]$.

Si la solution est dans $[a; m]$, on réitère le procédé dans $[a; m]$, sinon on le réitère dans $[m; b]$.





Exemple :

Donner un encadrement, par la méthode de dichotomie, de l'unique solution de l'équation $x^3 - 5x + 2 = 0$

Exercices d'applications : capacité 4 p. 205 et exercices