Séquence 6

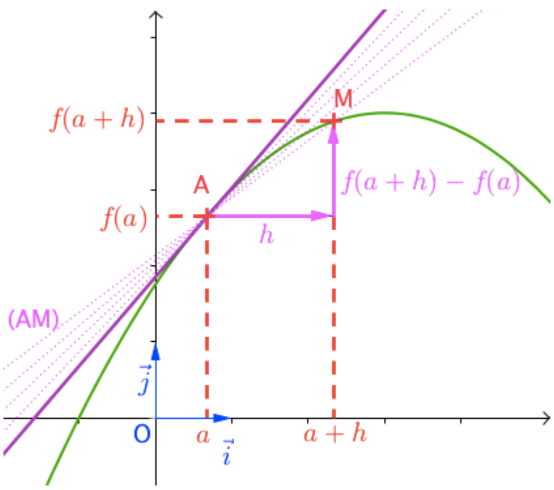
Dérivation

I. Rappels

A. Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
L est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

Définition :
La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L.



Propriété :
Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a).}$$

Exemple :
On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

Tutoriel Numworks

B. Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{kx},\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ke^{kx}$	$\mathbb{R}$

Exemples :

C. Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=u'+v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)'=ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)'=u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples :

a) $f(x)=(2x^2-5x)(3x-2)$

b) $g(x)=\frac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

D. Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème (admis) :

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

Exemple :

Soit la fonction $f$définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

Dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$

II. Compléments de dérivation

A. Dérivée d'une fonction composée

Propriété :

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que pour tout réel x appartenant à I, $u(x) \in$ à J.

La fonction v 0 u est dérivable sur I et

Dérivée des fonctions composées usuelles

Fonction	Dérivée
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$
u^2	$2u'u$
e^u	$u'e^u$

Démonstrations : p. 174

Applications : capacités 9 et 10 p. 175 et exercices

B. Dérivée seconde

Définition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que f' est dérivable sur I.

On appelle dérivée seconde de f sur I la fonction dérivée de f' , que l'on note f''.

Exemples :