Séquence 2

Limite des fonctions – Partie 1

I. Limite d'une fonction et asymptote

Activité 2 p. 164 : introduction de la notion de limites à l'infini et en un point.

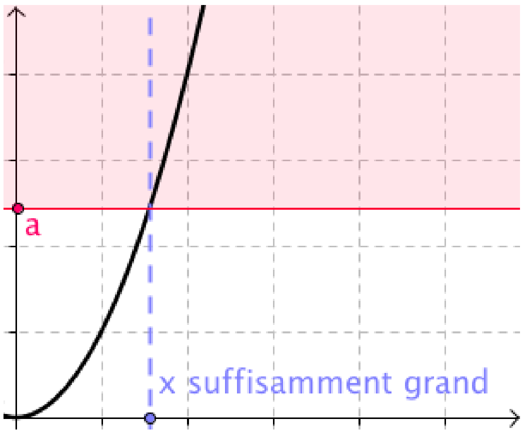
A. Limite à l'infini

1) Limite infinie à l'infini

- Exemple :

La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

- Interprétation graphique :



- Définitions

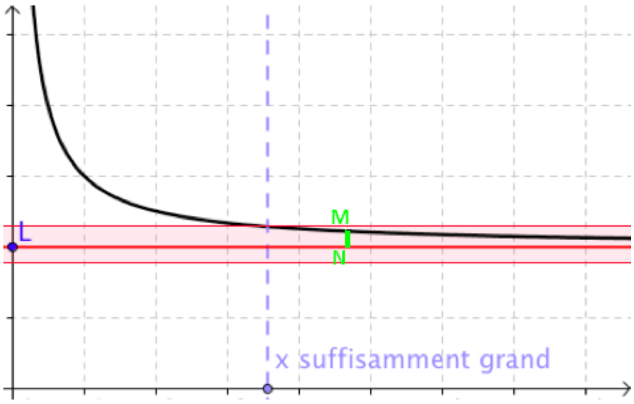
- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a\ ;\ +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty\ ;\ b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2) Limite finie à l'infini

- Exemple :

La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

- Interprétation graphique :



- Définition :

On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

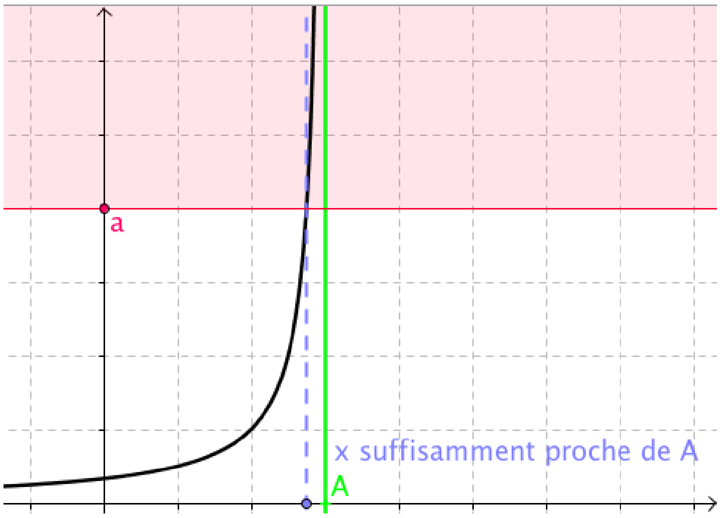
- Définition Asymptote horizontale :

La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

B. Limite d'une fonction en un réel A

- Exemple :

La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers A.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de A.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de A.



Définitions

- On dit que la fonction f admet pour limite +¥ en A si tout intervalle $]a\ ;\ +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$.

- On dit que la fonction f admet pour limite - ¥ en A si tout intervalle $]-\infty\ ;\ b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

Définition asymptote verticale

La droite d'équation $x = A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f, si : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

Exemple et remarque

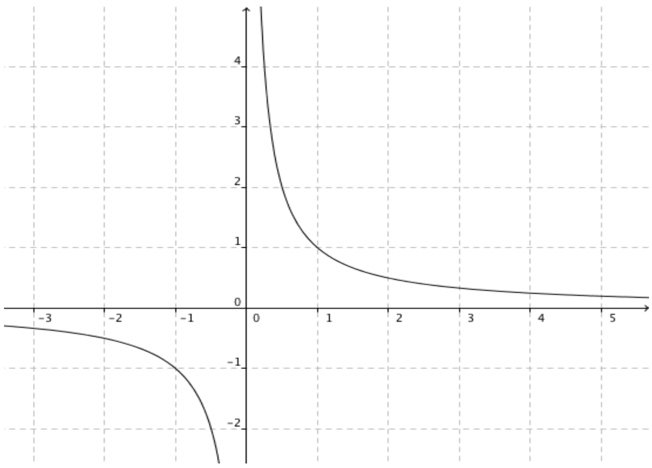
Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.

Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Si $x < 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

- Si $x > 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

On parle de **limite à gauche de 0** et de **limite à droite de 0**.



C. Applications

Déterminer graphiquement les limites d'une fonction et en déduire la présence d'asymptotes éventuelles.

- ✓ Capacité 1 et 2 p. 167 et exercices

II. calcul des limites

A. Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

$\lim_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to\alpha} f(x)+g(x) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

*F.I = Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

2) Limite d'un produit

$\lim_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) =$	$L\,L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2)$?

3) Limite d'un quotient

$\lim_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L\neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{x\to\alpha} g(x) =$	$L'\neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1-2x}{x-3}$

Remarque :

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty - \infty", "0 \times \infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

B. Limite à l'infini

1) Limites de fonctions usuelles

Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ (pour n pair)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ (pour n impair)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

2) Limites d'une fonction polynôme

Propriété :

En $+\infty$ et $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

Exemples :

3) Limite d'une fonction quotient

Propriété

Soient P une fonction polynôme dont $a_p x^p$ est le monôme du plus haut degré, et Q une fonction polynôme dont le monôme du plus haut degré est $a_q x^q$, où p et q sont deux entiers naturels.
Alors

$$\lim_{\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{\pm\infty} \frac{a_p}{a_q} \times x^{p-q}$$

Exemples :

4) Applications

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$

Exercices :

C. Limite en un nombre

1) Limites de fonctions usuelles

Propriétés

- Pour tout n appartenant à N*, si n est pair, $\lim_{0} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- Pour tout n appartenant à N*, si n est impair, la fonction $x \to \frac{1}{x^n}$ a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 avec $x > 0$. On parle de limite à droite en 0. Quand x tend vers 0 avec $x < 0$, elle a pour limite $-\infty$. On parle de limite à gauche en 0.
- $\lim_{0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

2) Quelques exemples d'étude

1) $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

2) $\lim_{x \to 3} \frac{1-2x}{x-3}$

Exercices d'application