Séquence 4

Ensembles et nombres

I. Les ensembles des nombres :

A. Définitions et propriétés :

Théorème 1 : Propriété de la droite numérique graduée.

On peut associer à tout point M d'une droite graduée un nombre appelée abscisse du point M.

Définition 1 : L'ensemble des abscisses des points de la droite numérique graduée est appelé l'ensemble des nombres réels. On le note R.

Définition 2 : Les différents ensembles de nombres :

- Nombres entiers naturels : $0; 1; 2; 3 \ldots$ On le note N
- Nombres entiers relatifs : $\ldots - 3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$ On le note Z
- Nombres décimaux : $\{\frac{a}{10^n}$ avec $a \in Z$ *et* $n \in N$ }. On le note D
- Nombres rationnels : $\{\frac{a}{b}$ *avec* $a \in Z$ et $b \in N^*$ }. On le note Q
- Nombres réels : π, $\sqrt{2}$, -π, $-\sqrt{2}$, 1; $\frac{1}{3}$. On le note R

Remarques :

- Lorsque l'on rajoute une * à l'ensemble donné, ceci indique qu'il est privé de 0.
- Si l'on ajoute +, ceci indique que l'on ne considère que les nombres positifs
- Si l'on ajoute -, ceci indique que l'on ne considère que les nombres négatifs.

Propriété 1 : Les ensembles des nombres vérifient les inclusions suivantes :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Propriété 2 : Tout nombre rationnel se caractérise par une écriture décimale ayant un nombre fini de décimales ou comportant une période.

Propriété 3 : Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, comme $\sqrt{2}$.

Démonstration : projection p 56 livre

Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel.**

II. Les entiers :

A. Multiples et diviseurs :

Définition : Quels que soient les entiers relatifs a et b, on dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier relatif K tel que $a = k.b$.

De plus, si b est non nul et que a est un multiple de b, on dit que b est un **diviseur** de a.

Notation : Si b divise a, on note b|a.

Remarques :

- ✓ Lors de l'utilisation de cette définition, il faudra toujours vérifier que le nombre k est un entier relatif.
- ✓ Le nombre 0 est un multiple de tous les entiers relatifs. En effet, pour tout entier relatif, on a $0 = 0.a$
- ✓ Tout entier relatif non nul est un diviseur de 0.
- ✓ Le nombre 1 est un diviseur de tout entier relatif a. En effet, 1 est un entier non nul vérifiant $a = a.1$. Idem pour -1.

Théorème 2 :

Quel que soit l'entier relatif a, la somme de deux multiples de a est un multiple de a.

Démonstration : Projection p 54

Théorème 3 :

Tout entier naturel non nul admet un nombre fini de diviseurs positifs.

Théorème 4 :

Quels que soient a, b, c trois entiers relatifs avec a non nul :

- Si a divise b, alors -a divise b
- Si a divise b et si a divise c alors a divise b $+$c et a divise b - c

Exemple :

- ✓ Montrer que 5 et -3 sont des diviseurs de -15.
- ✓ Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier n+1 est un diviseur de l'entier $n^2 - 1$

Méthode : décomposer les nombres en produit de facteurs simples.

- ✓ Combien y a-t-il de multiples de 17 compris entre 2000 et 2100. Les donner.

Méthode : Tous les multiples de n sont de la forme kn avec k ∈ Z. Les encadrements permettent de répondre à la condition.

B. Nombres pairs et impairs :

Définition : On dit qu'un nombre entier relatif n est **pair**, s'il est divisible par 2.

On dit que n est un entier **impair,** s'il n'est pas divisible par 2.

Exemples : Nombres pairs : -6, -4, 2, 0… ;

Nombres impairs : -7,-5,-3,-1… ;

Critère de parité :

Pour tout entier relatif n :

- n est **pair** s'il est multiple de 2, donc s'il existe un entier relatif k tel que $\mathbf{n = 2k}$;
- n est **impair** s'il n'est pas multiple de 2, donc s'il n'est pas divisible par 2, donc s'il existe un entier relatif k tel que $\mathbf{n = 2k + 1}$.

Théorème 5 :

Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration : projection livre p 54

C. Nombres premiers :

Définition : Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs distincts dans N.

Comme 1 est diviseur de tout nombre entier et qu'un entier a est toujours diviseur de lui-même, **un nombre premier a pour seuls diviseurs entiers naturels 1 et lui-même.**

Exemples :

A. 0 n'est pas premier car tout entier a divise 0 c'est-à-dire $0 = 0.a$
B. 1 n'est pas premier car il n'a qu'un diviseur dans N lui-même.
C. Les premiers nombres premiers sont :2, 3, 5,7,11,13,17,19…

Propriété : Tout entier naturel au moins égal à 2 est premier ou produit de deux nombres premiers.

Cette décomposition en produits de facteur premier est unique.

Méthode : Pour décomposer un entier en facteur premier, on le divise successivement par les nombres de la liste ordonnée des nombres premiers.

Exemple : Décomposition de 360.

III. Intervalles et valeurs absolus :

A. Caractérisation des intervalles :

Définitions :

Soient a et b deux nombre réels tels que $a < b$.

Intervalles bornés :

$x \in [a;b]$ équivaut à $a \leqslant x \leq b$

$x \in [a;b[$ équivaut à $a \leqslant x < b$

$x \in]a;b]$ équivaut à $a < x \leq b$

$x \in]a;b[$ équivaut à $a < x < b$

Intervalles non bornés :

$x \in [a;+\infty]$ équivaut à $x \geq a$

$x \in]a;+\infty]$ équivaut à $x > a$

$x \ \in]-\infty;a]\ equivaut$ à $x \leq a$

$$x \ \in]-\infty;a[\ equivaut \text{ à } x < a$$

Exercice : Représenter sur une droite graduée les intervalles ci-dessous.

Remarque Si a et b sont les bornes d'un intervalle, a est appelée « borne inférieur » et b est appelé « borne supérieur ».

Définition :

Soient I et J deux intervalles de R.

- On appelle **intersection** de I et J l'ensemble, notée I ∩ J , des réels x qui appartiennent à la fois à I et à J. Cet ensemble se lit « I inter J ».
- On appelle **réunion** de I et J l'ensemble, noté $I \cup J$, des réels x appartenant à I ou J. Cet ensemble se lit « I union J ».

Exemple : Capacité 8 et 9 p 59.

B. Valeur absolue d'un réel :

Définition : On appelle **valeur absolue** d'un nombre réel a, le nombre noté |a|, défini par :

$$\begin{cases} Si\ a \geq 0, |a| = a \\ Si\ a\ \leq 0, |a| = -a \end{cases}$$

Exemple : |7| = 7, |-7|=7

Propriété : La distance d de deux réels a et b est la distance des points A et B d'abscisses respectives a et b sur la droite numérique.

Cette distance d est égale a $a - b$ si a est supérieur ou égale à b et à $b - a$ si a est inférieure ou égale à b.

Cette distance se note |a – b|