Séquence 3

Les Vecteurs

I. Notions de vecteurs :

A. Translations :

Définition 1 : Soient A et B deux points du plan. On appelle **translation** qui transforme A en B, l'application qui a tout point M du plan associe son image M' tels que les segments [AM'] et [BM] ont le même milieu.

Conséquences :

- Si A = B alors la translation transforme tout point M du plan en lui-même. Les segments [AM] et [BM] sont confondus, ils ont le même milieu.
- Si A, B, et M sont trois points non alignés, le quadrilatère AMM'B est un parallélogramme.

B. Vecteurs :

Définition 2 : La translation qui transforme A en B est appelée la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriété 1 : Lorsque A et B sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- Sa direction : celle de la droite (AB)
- Son sens : de A vers B
- Sa longueur : AB

Définition 3 : La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelée **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Elle se note $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

Définition 4 : Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est notée $\vec{0}$ et se lit vecteur nul. La translation de vecteur nul transforme tout point M en M.

Conséquence : Soit A et B deux points du plan. $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si A = B.

Propriété 2 : Deux vecteurs non nuls sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens, et même longueur.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si :

- (AB) // (CD)
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens
- AB = CD

Notations : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont les représentants de $\vec{u}$ (à tracer)

Propriété 3 : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si [AD] et [BC] ont même milieu.

Propriété 4 : Soient A et B deux points distincts.

Le point I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

Définition : Soit A et B deux points du plan. **L'opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $-\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme B en A.

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.

Exercice d'applications : Capacité 1, 2 et 3 p.123 et exercices 48, 50, 52, 58 et 59 p 137.

II. Somme de vecteurs et produits par un réel :

A. Somme de vecteurs :

Définition : Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, **la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On note $\vec{u} + \vec{v}$ ce vecteur.

La différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ définie par

$\vec{u} + (-\vec{v})$.

Exercice : Tracer deux vecteurs, leur somme et leur différence.

Propriétés :

- Relation de Chasles : Quels que soient les points A, B et C

  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Règle du parallélogramme : Quels que soient les points A, B, C et D, dire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à dire que D est le quatrième point du parallélogramme ABDC.

Exercice : Tracer les figures.

Propriétés : Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
3. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
4. L'opposé $-\vec{u}$ du vecteur $\vec{u}$ vérifie $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Capacité 4 p. 125 :61p139

B. Produit d'un vecteur par un réel :

Définition : Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan, alors le vecteur $k \cdot \vec{u}$ est le vecteur ayant :

- même direction que $\vec{u}$;
- même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$
- $\|k \cdot \vec{u}\| = |k|.\|u\|$.

Si $k = 0$, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan $0 \cdot \vec{u} = 0$.

Si $\vec{u} = 0$, alors pour tout réel k, $\vec{k} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Exemple :

- Les vecteurs $\vec{u}$, $2\vec{u}$, $-3\vec{u}$ ont la même direction.
- $\vec{u}$ et $2\vec{u}$ ont le même sens.
- $\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ sont de sens contraire.

Propriété : Quels que soient les réels a et b et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

1. $(a + b)\vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$
2. $a\,(b \cdot \vec{u}) = (ab) \cdot \vec{u}$
3. $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$
4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Capacité 5 p. 125 :

Exercices d'applications : 62, 63, 67, 70, 71, 72, 78 p. 138 et 139

III. Vecteurs et coordonnées :

A. Base normée, orthogonale ou orthonormale :

Définition : On dit que les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ forment une **base** de l'ensemble des vecteurs du plan s'ils sont non nuls et n'ont pas la même direction.

- Si $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, on dit que la base est **normée**
- Si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ont des directions perpendiculaires, on dit que la base est **orthogonale.**
- Si la base est normée et orthogonale, on dit qu'elle est **orthonormée**.

Théorème :

Soit ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) une base de vecteurs du plan. Quels que soit le vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple de réel $(x; y)$ tels que $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Ce couple forme les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Notation : $\vec{u}\ (x; y)$

B. Egalité, somme et produit de vecteurs :

Soit une base ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) du plan dans laquelle on a les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ou $x, y, x',\ y'$ sont des réels.

Théorème :

$\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Pour tout réel k, $\mathrm{k} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \mathrm{k} \cdot x \\ \mathrm{k} \cdot y \end{pmatrix}$

C. Coordonnées d'un point dans un repère :

Définition : Soit O un point du plan et ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) une base des vecteurs du plan. On dit que le triplet (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) est un **repère** du plan, et O est l'origine du repère.

Définition : Soit un repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) et A un point. Il existe un unique couple de réels (x_A ; y_A) tel que $\overrightarrow{OA} = x_A . \vec{\imath} + y_A . \vec{\jmath}$.

(x_A ; y_A) sont les coordonnées de A dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note A($x_A$; y_A).

X_A est l'abscisse de A et y_A l'ordonnée.

Les coordonnées du point A dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Représentation graphique :

Théorème :

Soient les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (x_B-x_A ; y_B-y_A) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Démonstration :

Exemple : Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sachant que A(2;-1) et B(4;3).

D. Longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et coordonnées du milieu de [AB]

Théorème : Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Soient les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B).

Alors $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Propriété : Soit, dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le vecteur $\vec{u}\ (x; y)$.

La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Théorème : Soit le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B).

Alors les coordonnées du milieu I du segment [AB] sont :

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Exercice : Capacité 10 et 11 ou exercices 100, 104, 105, 122,124,125 p140.