Séquence 8

Fonction trigonométrique

I. Le cercle trigonométrique :

Activité 1 et 2 p.192 de découverte du cercle trigonométrique.

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\,)$

Définition : Le cercle trigonométrique C est le cercle de centre O, de rayon 1 et orienté dans le sens direct noté $+$; c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre.

A. Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique :

On considère le cercle trigonométrique C et T sa tangente au point I(1. ; 0). Cette droite est appelée **axe des réels.**

Sur cette droite, on considère les points $A(1;1) et\ \ A'(1;-1)$. On imagine qu'on enroule cette droite autour du cercle C. La demi droite [IA) va s'enrouler sur le cercle dans le **sens positif** alors que la demi droite [IA') va s'enrouler dans le **sens négatif.**

A tout nombre réel x, on associe le point N de la tangente T de coordonnée $(1;x)$, qui se superpose par enroulement sur un unique point M du cercle trigonométrique. M est appelé image de x sur le cercle C.

Représentation graphique :

Propriétés :

1) Par enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique, on peut associer à tout réel un unique point du cercle.
2) Soit a un réel et M le point du cercle trigonométrique associée au réel a , alors le point M est associé à tous les réels de la forme $a + 2k\pi$; k étant un entier.

Exemple : Associer le réel 0 au point I, $\frac{\pi}{2}$ au point J et le réel 1 au point R.

Définition : Un radian est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{IOR}}$ interceptant un arc de longueur 1 sur le cercle trigonométrique.

Ainsi, si A et B sont deux points du cercle trigonométrique, alors la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$ en radian est égale à la longueur de l'arc intercepté $\widehat{AB}$.

Propriété :

La mesure d'un angle en radian est proportionnelle à sa mesure en degré.

Valeurs remarquables :

- $0° = 0$ radian
- $30° = \frac{\pi}{6}$ radian
- $45° = \frac{\pi}{4}$ radian
- $60° = \frac{\pi}{3}$ radian
- $90° = \frac{\pi}{2}$ radian
- $180° = \pi$ radian

Exercices d'application : capacité 1 et 22, 29 p 202

B. Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition : Soit M le point du cercle trigonométrique associé au réel x.

L'abscisse du point M dans le repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ est le **cosinus** du réel x , noté $\cos x$.

L'ordonnée du point M dans le repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$est le sinus du réel x , noté $\sin x$.

Activité découverte des valeurs remarquables du cercles trigonométriques.

Valeurs remarquables :

A partir de l'activité précédente, construire un tableau représentant l'ensemble des valeurs remarquables du cercle trigonométrique.

Propriétés :

Pour tout réel a :

1) $-1 \leqslant \cos a \leqslant 1$ et $-1 \leq sin\ a \leqslant 1$
2) $\cos(a + 2k\pi) = \cos(a)$ et $\sin(a + 2k\pi) = \sin(a)$ pour k $entier$.
3) $(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$

Démonstrations des propriétés et valeurs remarquables :

Exercices d'application :

II. Les fonctions cosinus et sinus

A. Fonction cosinus et sinus :

Définition : La fonction cosinus, notée $\cos(x)$ est définie sur R par $x \to \cos(x)$.

La fonction sinus, notée $\sin(x)$ est définie sur R par $x \to \sin(x)$.

Propriétés :

1) **Parité :** La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire.

Ainsi, pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

2) **Périodicité :** Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

Ainsi, pour tout réel x, $\cos(x \mp 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x \mp 2\pi) = \sin(x)$.

Démonstrations :

Conséquence : La représentation graphique de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine, et celle de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercices d'application :

B. Courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

Activité 3 p.193 découverte des fonctions cosinus et sinus.

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont appelés des sinusoïdes.

On étudie les variations de ces fonctions sur $[0; \pi]$ en utilisant le cercle trigonométrique.

Schéma :

- Pour **la fonction cosinus,** quand le point M se déplace de I jusqu'à L, c'est-à-dire pour x variant de 0 à π, le point C se déplace de 0 à L, donc la fonction cosinus décroit de 1 à -1.
- Pour **la fonction sinus**, quand le point M se déplace de I jusqu'à J, pour x variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ le point S se déplace de 0 à J, donc la fonction sinus croit de 0 à 1. Puis quand M se déplace de J jusqu'à M, c'est-à-dire pour x variant de $\frac{\pi}{2}$ à π , le point S se déplace de J à 0, donc la fonction sinus décroit de 1 à 0.

On utilise ensuite la parité des fonctions sinus et cosinus pour obtenir leur représentation graphique sur R.

Tableaux de variations :

Courbes représentatives :

Exercices d'application : 80, 81, 83, 87, cap vers le bac, 107 p 205 à 214