Séquence 7

Suites numériques – partie 1

I. Qu'est-ce qu'une suite ?

A. Notations et définitions

On note (Un) la suite U_1, U_2, …, U_n,…. Le nombre U_n est appelé terme d'indice n de la suite (U_n). De façon générale, on note le premier terme U_0

B. Mode de génération d'une suite.

Il existe deux procédés usuels pour définir une suite.

1. Explicite : On utilise une expression de la forme $U_n = f(n)$
   Ex : $U_n = n^2+2n$.
   On peut alors calculer n'importe quel terme de la suite. (à faire par les élèves)
2. Par récurrence : Ce procédé signifie que l'on donne le premier terme et une relation permettant de définir chaque terme à partir du précédent. La relation peut être donnée par une formule explicite ou un algorithme.

Exemple de récurrence par une formule explicite :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0=1$ et la relation $U_{n+1}= 3U_n+2$, pour tout naturel n. Calcul des trois premiers termes par les élèves.

Exemple de récurrence par un algorithme :

cf. livre p 72

Capacité 1 et 2 p73.

II. Les suites arithmétiques.

A. Définition

Lorsque pour une suite (U_n), pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours le même nombre fixe, on dit que la suite (U_n) est arithmétique.

Définition 1 :

Dire qu'une suite (U_n) est arithmétique signifie qu'il existe un réel r tel que, pour tout naturel n :

$$Un + 1 = Un + r$$

Le réel r est appelé la raison de la suite.

Remarques :

- Le réel r peut être positif ou négatif
- Si $r = 0$ alors tous les termes de la suite sont égaux. On dit qu'elle est constante.

Ainsi, connaissant la raison et le premier terme, cette relation de récurrence permet de calculer tous les termes d'une suite arithmétique.

Propriété :

Le terme général d'une suite arithmétique permettant de calculer n'importe quel terme de la suite est donné par la formule suivante :

$$U_n = U_p + (n-p).r$$

Avec r la raison de la suite.

En particulier, $Un = U_0 + n.r$

Démonstration :

On utilise la relation de récurrence pour i $= 0,1,2, \ldots\ldots jusqu'a$ i $= n - 1$

La somme de tous les membres de gauche est alors égale à celle de tous les membres de droite

On simplifie alors pour obtenir l'égalité demandée.

B. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Théorème (Somme des premiers entiers)

Pour tout entier $n \in$ N

$$0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Une démonstration astucieuse consiste à réécrire la somme en inversant l'ordre des termes :

S $= 0 + 1 + 2 + \cdots + n$ (1)

S $= n + n - 1 + n - 2 + \cdots + 0$ (2)

Puis on additionne les lignes **(1)** et **(2)** termes à termes. Dans le membre de gauche on trouve que tous les termes sont égaux à n.

Comme en tout, il y a $n + 1$ termes, on trouve :

$\mathrm{S} + \mathrm{S} = n + n + n + \cdots + n$

$2\mathrm{S} = n(n + 1)$

$\mathrm{S} = \frac{n.(n+1)}{2}$

Propriété :

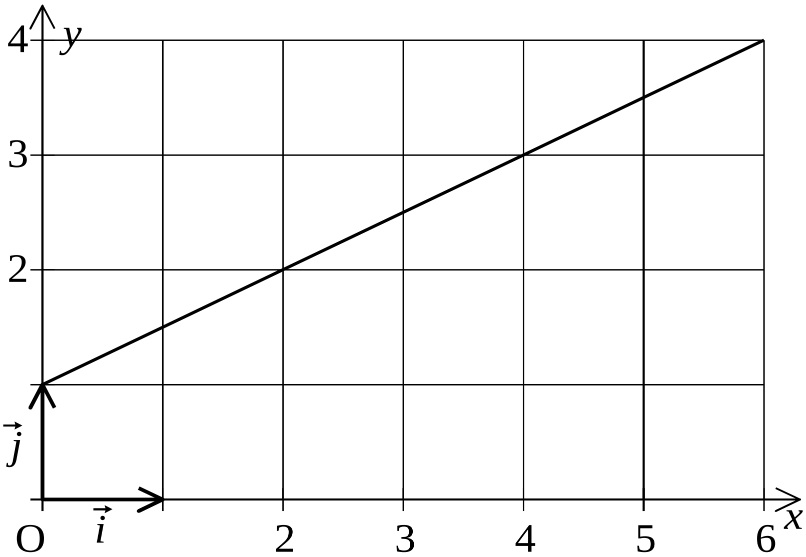
La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$\frac{(nombre\ de\ termes).(premier\ terme + dernier\ terme)}{2}$$

C. Lien avec les fonctions affines

On sait que si la suite (U_n) est arithmétique alors elle est de la forme $an + b$. Or on sait aussi que la fonction définie par $f(x) = ax + b$ est une fonction affine. Ainsi U_n est égal à $f(n)$.

Graphiquement, U_n est donc l'ordonnée du point d'abscisse n de la droite d'équation $y = ax + b$



Capacité 8 p 77