Séquence 5

Probabilité conditionnelle et indépendance

I. Probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A

A. Etude d'un exemple

On lance un dé équilibré, l'univers Ω est l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

On note M l'événement « obtenir un multiple de 3 » et I l'événement « obtenir un nombre impair ».

Si l'on sait que le nombre obtenu est impair, il n'y a qu'un seul multiple de 3 à savoir 3.

Ainsi, sachant que le nombre obtenu est impair, la probabilité que ce soit un multiple de 3 est $\frac{1}{3}$.

On note cette probabilité $P_I(M)$, elle est égale à $\frac{1}{3}$.

Nous dirons que $P_I(M)$ est la probabilité de M sachant I.

Activité 1 p. 274 : découvrir la notion de probabilité conditionnelle.

B. Définition et théorème

Définition 1 : Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé Ω, tel que $P(A) \neq 0$,

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre noté $P_A(B)$, définie par :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Théorème 1 : Si A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors

$$P(A\cap B)=P(A).P_A(B)=P(B).P_B(A)$$

Démonstration :

II. Arbres pondérés et probabilités totales

A. Construction d'un arbre pondéré.

Activité 3 p. 275 : découverte des arbres pondérés.

On peut modéliser une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers Ω par un arbre pondéré.

Il est représenté par deux niveaux de branches. Le premier niveau représente l'évènement A et son contraire et le deuxième niveau permet d'indiquer les probabilités conditionnelles.

On appelle chemin une suite de branches. Un nœud est le point de départ d'une ou plusieurs branches.

Propriété 1 : Règle de la somme

La somme des probabilités inscrites sur deux branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Propriété 2 : Règle du produit :

Le produit des probabilités inscrites sur les deux branches d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

B. Formules des probabilités totales

Définition : On appelle partition de Ω un ensemble d'événements deux à deux incompatibles et dont la réunion est Ω.

Propriété : formule des probabilités totales

On considère $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n événements de probabilités non nuls formant une partition de Ω.

Alors la probabilité d'un événement quelconque B est donné par :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

Remarque

Sur un arbre pondéré, la probabilité de l'événement B s'obtient en additionnant les probabilités des chemins conduisant à B.

Exercices d'application : 45,50,51,48,53 p290

III. Probabilité et indépendance

A. Indépendance de deux événements :

Définition : Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

Comment exprime-t-on la probabilité conditionnelle ?

Ainsi, A et B sont indépendants équivaut à **P(A∩B) = P(A).P(B)**

Exercices d'application :57 p 281.

B. Succession de deux épreuves indépendantes :

Dans le cas où une expérience est constituée d'une succession de deux épreuves indépendantes, on peut déterminer la probabilité des différentes issues de l'expérience à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau.

Exemple d'étude

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Après avoir remis la carte dans le paquet, on tire une seconde carte. On note C l'événement « la carte est un cœur » et $\bar{C}$ son contraire.

A. Représentation par un arbre

Un jeu de 32 cartes contient 8 cœurs. Le tirage étant effectué au hasard, on a :

$\mathrm{P(C)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, soit $\mathrm{P}(\bar{C}) = \frac{3}{4}$

D'où l'arbre suivant :

A partir de l'arbre, on peut déterminer plusieurs probabilités.

Exemple : Probabilité de tirer un cœur uniquement au premier tirage.

B. Représentation par un tableau :

On note C_1 l'événement « la carte obtenue au premier tirage est un cœur » et C_2 l'événement « la carte tirée au deuxième tirage est un cœur », $\bar{C}_1$ et $\bar{C}_2$ leurs événements contraires respectifs.

	C_2	$\bar{C}_2$	
C_1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$P(C_1) = \frac{1}{4}$
$\bar{C}_1$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	$P(\bar{C}_1) = \frac{3}{4}$
	$P(C_2) = \frac{1}{4}$	$P(\bar{C}_2) = \frac{3}{4}$	