Séquence 7 :

Fonctions de référence

I. Fonctions de référence

A. Fonction carrée

Activité 1 p. 214 : découverte de la fonction carrée

Définition 1 : On appelle fonction carré la fonction f définie sur R telle que pour tout réel x, $f(x) = x^2$.

Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative d'une fonction carrée est une parabole. Son équation est $y = x^2$.

Le point O, origine du repère, est appelée le sommet de la parabole.

Remarques :

- Tout nombre réel x admet un carré et on a $x^2 \geqslant 0$.
- Tous les points de la parabole sont au-dessus ou sur l'axe des abscisses.
- La parabole représentant la fonction carrée dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, appelée axe de la parabole.

Représentation graphique :

Pour tracer la courbe d'une fonction de référence, on établit un tableau de valeurs, puis dans un repère orthogonal du plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ adéquat, on place les points du tableau.

Exercice d'application : Tracer la courbe représentative de la fonction carrée.

Propriété : résolution algébrique d'une équation faisant intervenir la fonction carrée.

Soit k un nombre réel. L'équation $x^2 = k$ admet :

a) Si $k < 0$, aucune solution : $S = \emptyset$
b) Si $k = 0$, une unique solution : $S = \{0\}$
c) Si $k > 0$, deus solutions distinctes : $S = \{\sqrt{(k)}; -\sqrt{(k)}\}$

Exemples :

B. Fonction cube :

Activité 2 p. 214 : découverte de la fonction cube

Définition 3 : On appelle fonction cube la fonction f définie sur R telle que pour tout réel x, $f(x) = x^3$. Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction cube s'appelle une cubique, son équation est $y = x^3$.

Remarques :

- Tout nombre réel x admet un cube x^3 .
- Quels que soient les nombres réel x, x et x^3 ont le même signe.
- La courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exercice d'application : Tracer la courbe représentative de la fonction cube.

Propriétés :

Quel que soit le nombre réel x :

1) Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$.
2) Si $x \geqslant 1$ alors $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$

Démonstrations :

Exercices d'applications : tracer sur votre calculatrice les fonctions x, x^2 et x^3 dans un même repère puis démontrer les inégalités précédentes.

Les propriétés précédentes se traduisent graphiquement par la position relative des courbes représentatives de chacune des fonctions.

Soit (d) la droite d'équation $y = x$, P la parabole d'équation $y = x^2$ et C la cubique d'équation $y = x^3$.

Sur l'intervalle $[0; 1]$, la cubique C est au-dessous de la parabole P qui est en dessous de la droite (d).

Sur l'intervalle [1 ; $+\infty$[,la droite (d) est en-dessous de la parabole P, qui est elle-même située en dessous de la cubique C.

Propriété : résolution algébrique d'une équation faisant intervenir la fonction cube.

Soit k un nombre réel.

- L'équation $x^3 = k$ admet une unique solution qui est $k^{\left(\frac{1}{3}\right)}$. Cette solution se nomme racine cubique de k et se note $\sqrt[3]{k}$
- L'inéquation $x^3 \leq k$ a pour ensemble solution l'intervalle $]-\infty;\ \sqrt[3]{k}[$

Exemples :

Capacité 1, 2 et 3 p. 217 et exercices d'applications.

C. Fonction racine carrée :

Définition 2 : on appelle fonction racine carrée le fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que pour tout réel x positif, $f(x) = \sqrt{(x)}$.

Tout nombre réel $x \geqslant 0$ admet une racine carrée et on a : $\sqrt{(x)} \geqslant 0$.

Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction carrée a pour équation $y = \sqrt{(x)}$ et son allure est celle d'une « demi-parabole couchée ».

Exercices d'applications : Tracer la courbe représentative de la fonction racine carrée.

Propriétés : résolution algébrique d'une équation faisant intervenir la fonction racine carré.

Soit k un nombre réel.

- Si $k < 0$ alors l'équation $\sqrt{(x)} = k$ n'admet aucune solution réelle.
- Si $k \geqslant 0$ alors l'équation $\sqrt{(x)} = k$ a une unique solution qui est k^2

Exemples :

D. Fonction inverse :

Activité 3 p. 215 : découverte de la fonction inverse.

Définition : On appelle fonction inverse la fonction f définie sur $]-\infty; 0[\text{U}]0; +\infty[$ telle que pour tout réel x non nul, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole.

Propriétés :

- Tout nombre réel x non nul admet un inverse et l'on a $\frac{1}{x} \neq 0$.
- Pour tout nombre réel x non nul, les nombres réels x et $\frac{1}{x}$ ont le même signe.
- La fonction inverse n'est pas définie en 0, c'est pourquoi la courbe est composée de deux branches distinctes symétriques par rapport à l'origine du repère O.

Exercices d'application : Tracer la courbe représentative de la fonction inverse.

Propriété : résolution algébrique d'une équation faisant intervenir la fonction inverse.

Soit k un nombre réel.

- Si $k = 0$ alors l'équation $\frac{1}{x} = k$ n'a pas de solutions.
- Si k est non nul alors l'équation $\frac{1}{x} = k$ admet une unique solution $x = \frac{1}{k}$.

Exemples :

Capacité 4, 5 et 6 p.219 et exercices d'applications.